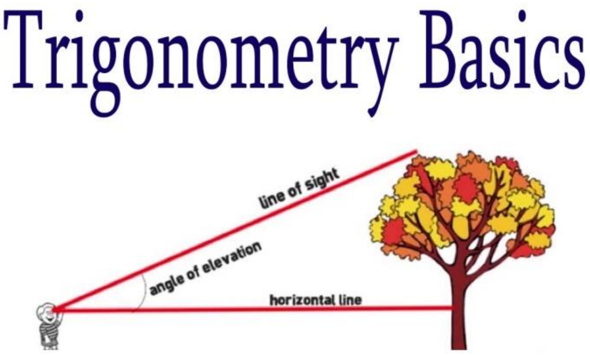
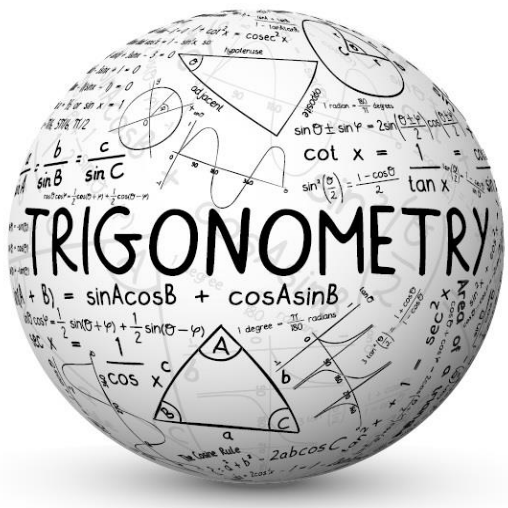
INTRODUCTION TO

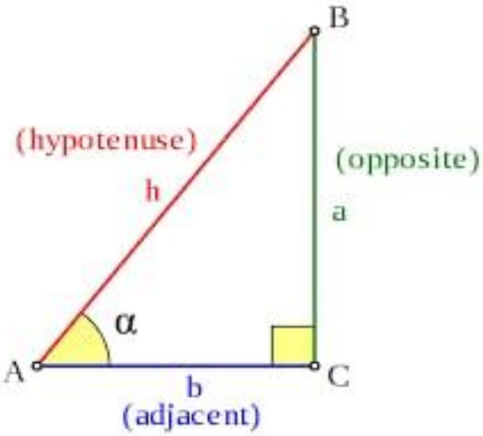
TRIGONOMETRY

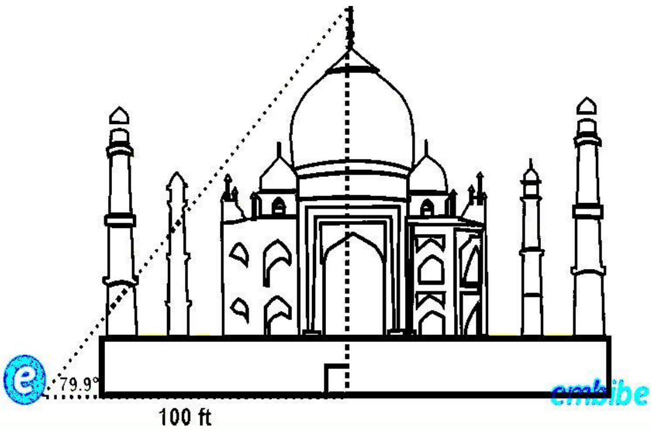
ٹرگنومیٹری کا تعارف

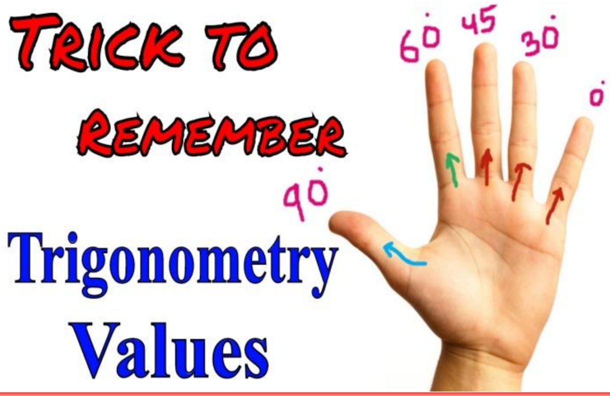
Key Notes











Prepared and solved by:
FATHIMA SUHAIB
Asst. Teacher_GUHS, SIRSI.

E-Mail:
kbsuhaibbaig@gmail.com
fathimabishaikh1985@gmail.com
Mobile: +91 7204143174

ٹرگنومیٹری کا تعارف

INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY

"شاید ایسی کوئی چیز نہیں جو ریاضی میں وہ مرکزی اہمیت رکھتی ہو جو ٹرگنومیٹری کی ہے-"   جے-ایف-ہربرٹ(1980)

لفظ ٹرگنومیٹری ایک یونانی لفظ ہے۔ جس کے معنی **ٹری (تین)**، **گون (ضلع)** اور **میٹری (پیائش)** ہیں- درحقیقت ٹرگنومیٹری مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے تعلق کے مطالعے کا نام ہے-

➢ قائمتہ الزاویہ مثلث سے جڑے اصطلاحات:-

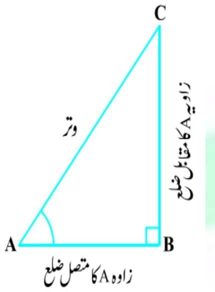
زاویہ قائمہ (Right angle):-زاویہ جس کی قیمت 90° ہو-

زاویہ حادہ(acute angle):-زاویہ جو 90° سے کم ہو

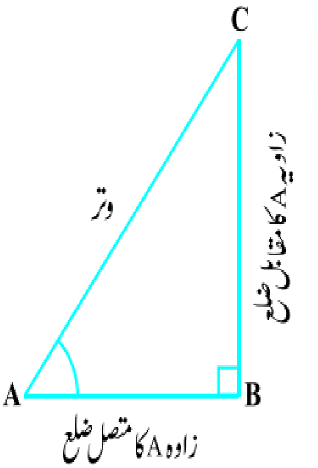
مقابل ضلع(opposite side):-حادہ زاویہ A کے لحاظ سے BC زاویہ A کا مقابل ضلع کہلاتا ہے۔

متصل ضلع(Adjacent side):-حادہ زاویہ A کے لحاظ AB سے زاویہ A کا متصل ضلع کہلاتا ہے-

وتر(Hypotenuse):-زاویہ قائمہ B کا مقابل ضلع AC وتر کہلاتا ہے-



➢ ٹرگنومیٹرک نسبتیں:- ٹرگنومیٹرک نسبتیں مندرجہ میں معرف ہیں۔



$$\sin A = \text{sine کا } \angle A = \frac{\text{زاویہ A کے مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \text{cosine کا } \angle A = \frac{\text{زاویہ A کے متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \text{tangent کا } \angle A = \frac{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}{\text{زاویہ A کا متصل ضلع}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec} A = \text{cosecant کا } \angle A = \frac{1}{\text{Sine کا } \angle A} \quad \frac{\text{وتر}}{\text{زاویہ } \angle A \text{ کے مقابل ضلع}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sec A = \text{secant کا } \angle A = \frac{1}{\text{Cosine کا } \angle A} \quad \frac{\text{وتر}}{\text{زاویہ } \angle A \text{ کے متصل ضلع}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot A = \text{cotangent کا } \angle A = \frac{1}{\text{Tangent کا } \angle A} = \frac{\angle A \text{ کا متصل ضلع}}{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}} = \frac{AB}{BC}$$

نوٹ:- مثلث کے زاویہ (حادہ) کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر اس کے اضلاع کی لمبائیوں کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتیں اگر زاویہ وہی ہو-

➢ مقلوب نسبتیں:-

نسبتیں Sec A, CosecA اور cot A بالترتیب Sin A, Cos A اور tan A کی مقلوب نسبتیں ہیں۔

$$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} \Leftrightarrow \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} \Leftrightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} = \frac{\sin A}{\cos A} \Leftrightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\cos A}{\sin A}$$

➢ کچھ مخصوص زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں-

ڈگری میں	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
ریڈینس میں	0	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\Pi}{4}$	$\frac{\Pi}{3}$	$\frac{\Pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	معرف نہیں
$\operatorname{cosec}\theta$	معرف نہیں	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	معرف نہیں
$\cot\theta$	معرف نہیں	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

➢ تمتی زاویوں کے لئے ٹرگنومیٹرک نسبتیں

$\sin(90° - A) = \cos A,$ $\cos(90° - A) = \sin A,$

$\tan(90° - A) = \cot A,$ $\cot(90° - A) = \tan A,$

$\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A,$ $\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A,$

ٹرگنومیٹرک تماثلات:-ایک مساوات تماثلہ کہلاتی ہے اگر وہ اس میں موجود متغیر کی تمام قدروں کے لئے درست ہو،اسی طرح سے مساوات جس میں ٹرگنومیٹرک نسبتیں شامل ہوتی ہیں **ٹرگنومیٹرک تماثلات** کہلاتی ہیں-اگر اس میں ملوث تمام زاویوں کے لئے درست ہو-

$$1)\ sin^2A + cos^2A = 1 \ \Leftrightarrow\ sin^2A = 1 - cos^2A \Leftrightarrow\ cos^2A = 1 - sin^2A$$

$$2)\ 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \ \Leftrightarrow\ tan^2A = sec^2A - 1 \Leftrightarrow sec^2A - tan^2A = 1$$

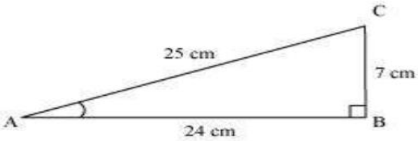
$$3)\ \cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A \Leftrightarrow \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A - 1 \Leftrightarrow \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$$

11.1

1- قائم ΔABC میں جو B زاویہ پر قائم ہے 24 سم = AB، 7 سم = BC معلوم کیجئے

$$\sin A, \cos A \text{(i)} \quad \sin C, \cos C \text{(ii)}$$

حل:- فیثا غورث کے مسئلہ کی مدد سے



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (24\ cm)^2 + (7\ cm)^2$

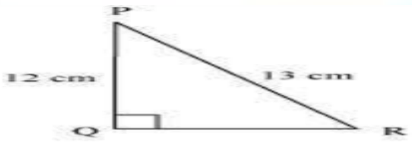
$= (576 + 49)\ cm^2$

$= 625\ cm^2$

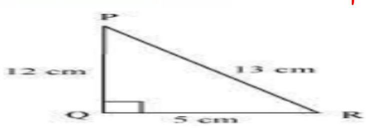
$\therefore AC = \sqrt{625}\ cm = 25\ cm$

$$\text{(I)}\sin A = \frac{opp}{hyp} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{adj}{hyp} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

$$\text{(ii)}\sin C = \frac{opp}{hyp} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{adj}{hyp} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$



2- شکل میں $tanP - cotP$ معلوم کیجئے-



حل:- فیثا غورث کے مسئلہ کی مدد سے

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$(13\ cm)^2 = (12\ cm)^2 + QR^2$

$169\ cm^2 = 144\ cm^2 + QR^2$

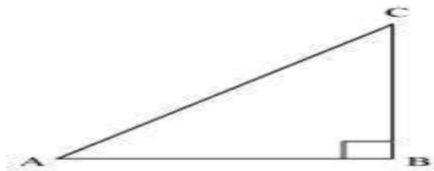
$25\ cm^2 = QR^2$

$QR = 5\ cm$

$$\tan P = \frac{opp}{adj} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}, \cot R = \frac{adj}{opp} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

$$tanP - cotR = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$$

3- اگر $sinA = \frac{3}{4}$ تو $cosA$ اور $tanA$ کی قدر معلوم کیجئے-



دیاہوا ہے

$$sinA = \frac{3}{4} = \frac{BC}{AC}$$

فرض کیجئے کہ BC=3k,AC=4 k, جہاں k ایک مثبت عدد ہے-

فیثا غورث کے مسئلہ کی مدد سے

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(4k)^2 = AB^2 + (3k)^2$$

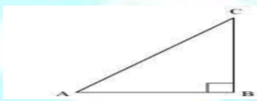
$$16k^2 - 9k^2 = AB^2$$

$$7k^2 = AB^2$$

$$AB = \sqrt{7}k$$

$$cosA = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3k}{\sqrt{7}k} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

4- $15cotA = 8$ دیاہوا ہے- $sinA$ اور secA معلوم کیجئے-



فیثا غورث کے مسئلہ کی مدد سے

دیاہوا ہے $cotA = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{15}$

فرض کیجئے کہ BC=15k, AB=8k, جہاں k ایک مثبت عدد ہے-

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (8k)^2 + (15k)^2$$

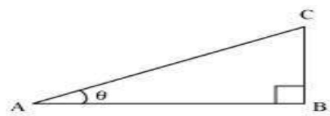
$$= 64k^2 + 225k^2$$

$$= 289k^2$$

$$AC = 17k$$

$$\mathrm{sinA} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{15\mathrm{k}}{17\mathrm{k}} = \frac{15}{17}, \mathrm{secA} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{17\mathrm{k}}{8\mathrm{k}} = \frac{17}{8}$$

5- $sec\theta = \frac{13}{12}$ دیاہوا ہے، باقی تمام ٹرگنو میٹرک نسبتیں معلوم کیجئے-



فرض کیجئے کہ مثلث B پر قائم ہے

اگر AC=13k,AB=12k ہو جہاں k مثبت عدد ہے- تب فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے

$$sec\theta = \frac{hyp}{adj} = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(13k)^2 = (12k)^2 + (BC)^2$

$169k^2 = 144k^2 + BC^2$

$25k^2 = BC^2$

$BC = 5k$

$$\sin\theta = \frac{opp}{hyp} = \frac{BC}{AC} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

$$\cos\theta = \frac{adj}{hyp} = \frac{AB}{AC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$

$$tan\theta = \frac{opp}{adj} = \frac{BC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

$$cot\theta = \frac{adj}{opp} = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

$$cosec\theta = \frac{hyp}{opp} = \frac{AC}{BC} = \frac{13k}{5k} = \frac{13}{5}$$

6- اگر $\angle A$ اور $\angle B$ حادہ زاویہ ہیں۔ جبکہ cosA=cosB تب دکھائیے کہ $\angle A = \angle B$

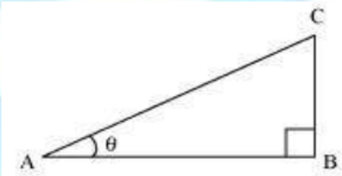
مثلث میں دیا گیا ہے کہ،

$$cosA = cosB$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AC = BC \Rightarrow \angle A = \angle C$$

مثلث میں مساوی ضلعوں کے مقابل زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

7- اگر $cot\theta = \frac{7}{8}$، قدر معلوم کیجئے (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2\theta$



فرض کیجئے کہ مثلث B پر قائم ہے

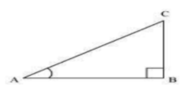
$$(i) \frac{(1+sin\theta)(1-sin\theta)}{(1+cos\theta)(1-cos\theta)} = \frac{(1-\sin^2\theta)}{(1-\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta = (cot\theta)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$$

$$\cot^2\theta\ (ii)$$

$$\cot^2\theta = (cot\theta)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$$

8- اگر 3cot A=4 جانچ کیجئے کہ $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ ہے یا نہیں؟

مثلث میں دیا گیا ہے کہ،  3cot A=4

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$= (4k)^2 + (3k)^2$

$= 16k^2 + 9k^2$

$= 25k^2$

$AC = 5k$

$$\Rightarrow \cot A = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan A = \frac{3}{4}, \sin A = \frac{3}{5}, \cos A = \frac{4}{5}$$

$$\cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

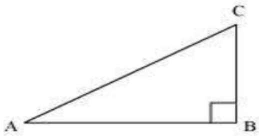
$$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}$$

9-مثلث ABC جو B پر قائم ہے- میں اگر $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ تو قدر معلوم کیجئے-

sinAcosC+cosAsinC(i) **cosA cosC−sinAsinC(ii)**

$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (\sqrt{3}k)^2 + (k)^2$

$= 3k^2 + k^2 = 4k^2$

$\therefore AC = 2k$

$\sin A = \frac{\text{Side opposite to } \angle A}{\text{Hypotenuse}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$

$\cos A = \frac{\text{Side adjacent to } \angle A}{\text{Hypotenuse}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin C = \frac{\text{Side opposite to } \angle C}{\text{Hypotenuse}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos C = \frac{\text{Side adjacent to } \angle C}{\text{Hypotenuse}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$

(i) sin A cos C + cos A sin C

$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$= \frac{4}{4} = 1$

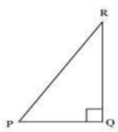
(ii) cos A cos C - sin A sin C

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

10- ΔPQR جو Q پر قائم زاویہ ہے- میں PR+QR=25cm اور PQ=5cm تو cosP، sinP اور tan P کی قدر معلوم کیجئے-

مثلث میں دیا گیا ہے کہ

PR+QR=25cm،



PQ=5cm

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$x^2 = (5)^2 + (25 - x)^2$

$x^2 = 25 + 625 + x^2 - 50x$

$50x = 650$

$x = 13$

PR=13cm, QR= 12cm

$$\sin P = \frac{\text{Side opposite to } \angle P}{\text{Hypotenuse}} = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$$

$$\cos P = \frac{\text{Side adjacent to } \angle P}{\text{Hypotenuse}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

$$\tan P = \frac{\text{Side opposite to } \angle P}{\text{Side adjacent to } \angle P} = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$$

11-بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل صحیح ہیں یا غلط-اپنے جواب کا جواز بھی پیش کیجئے-

(1) tanA کی قدر ہمیشہ 1 سے کم ہوتی ہے-

غلط کیونکہ tanA کی قدر 0 سے لا محدود تک بڑھتی ہے اور tan 45=1

(2) زاویہ A کی قدر کے لئے $secA = \frac{12}{5}$ ہے-

صحیح کیونکہ $secA$ کی قدر 1 سے لا محدود تک بڑھتی ہے

(3) cosA، زاویہ A کے cosecant کی مختصر شکل ہے-

غلط cosA، cosine کی مختصر شکل ہے-

(4) cotA، A اور cot کا حاصل ضرب ہے-

غلط، cot A صرف ایک علامت ہے-حاصل ضرب نہیں

(5) کسی زاویہ θ کے لئے $sin\theta = \frac{4}{3}$

غلط، کیونکہ $sin\theta$ کی قیمت ہ اور 1 کے درمیان ہوتی ہے 1 سے بڑی نہیں-یہ نا ممکن ہے-

11.2

1-مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجئے-

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

(ii) $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

(iii) $\dfrac{\cos 45°}{\sec 30° + \text{cosec} 30°}$

(iv) $\dfrac{\sin 30° + \tan 45° - \text{cosec} 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

حل:-

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ii) $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

$$= 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

(iii) $\dfrac{\cos 45°}{\sec 30° + \text{cosec} 30°}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(2+2\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{6}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{24-8} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{16}$$

$$= \frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$$

(iv) $$\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{3\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}}} = \frac{\left(3\sqrt{3}-4\right)}{\left(3\sqrt{3}+4\right)}$$

$$= \frac{\left(3\sqrt{3}-4\right)\left(3\sqrt{3}-4\right)}{\left(3\sqrt{3}+4\right)\left(3\sqrt{3}-4\right)} = \frac{\left(3\sqrt{3}-4\right)^2}{\left(3\sqrt{3}\right)^2-\left(4\right)^2}$$

$$= \frac{27+16-24\sqrt{3}}{27-16} = \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

(v) $$\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{16}{3}\right) - 1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{4}{4}} = \frac{67}{12}$$

2- صحیح جواب کو چنئے اور اپنے انتخاب کا جواز پیش کیجئے-

(i) $$\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} =$$

(A) $\sin 60^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

(i) $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

لہٰذا A صحیح ہے

(ii) $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

(A) $\tan 90^\circ$ (B) 1 (C) $\sin 45^\circ$ (D) 0

$$= \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

لہٰذا B صحیح ہے

(iii) درست جبکہ $\sin 2A = 2\sin A$ = A

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

$\sin 2A = \sin 0^\circ = 0$

$2\sin A = 2\sin 0^\circ = 2(0) = 0$

لہٰذا A صحیح ہے

(iv) $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} =$

(A). $\cos 60^\circ$
(B). $\sin 60^\circ$
(C). $\tan 60^\circ$
(D). $\sin 30^\circ$

(iv) $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{3}$$

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

لہٰذا C صحیح ہے

3۔ اگر $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ اور $0^\circ < A+B \le 90^\circ; A>B$ ،$\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ تو A اور B معلوم کیجئے۔

$\tan(A+B) = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan 60$

$\Rightarrow A + B = 60 \ldots (1)$

$\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan(A - B) = \tan 30$

$\Rightarrow A - B = 30 \ldots (2)$

دونوں مساواتوں کو جمع کرنے پر

$2A = 90$

$\Rightarrow A = 45$

مساوات 1 سے

45 + B = 60

B = 15

$\angle A = 45°$ and $\angle B = 15°$

4-بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل صحیح ہیں یاغلط اپنے جواب کا جواز پیش کیجئے-

(i) $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$

(i) $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$

$A = 30°$ and $B = 60°$

$\sin(A + B) = \sin(30° + 60°)$

$= \sin 90°$

$= 1$

$\sin A + \sin B = \sin 30° + \sin 60°$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$\sin(A + B) \neq \sin A + \sin B$

لہذا بیان صحیح نہیں ہے-

(ii) جیسے θ بڑھتا ہے $\sin\theta$ کی قدر بھی بڑھتی ہے

$\sin\theta$ کی قدر $0° < \theta < 90°$ میں بڑھتی ہے-

$\sin 0° = 0$

$\sin 30° = \frac{1}{2} = 0.5$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

$\sin 90° = 1$

لہذا بیان صحیح ہے-

(iii) جیسے θ بڑھتا ہے $\cos\theta$ کی قدر بھی بڑھتی ہے

$\cos\theta$ کی قدر $0° < \theta < 90°$ میں بڑھتی نہیں ہے-

(iii) $\cos 0° = 1$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

$\cos 60° = \frac{1}{2} = 0.5$

$\cos 90° = 0$

لہذا بیان صحیح نہیں ہے-

(iv) θ کی تمام قدروں کے لئے $\sin\theta = \cos\theta$

یہ صرف اسی وقت صحیح ہے جب θ کی قیمت $45°$ ہو باقی تمام قیمتوں کے لئے یہ صحیح نہیں ہے

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$sin30° = \frac{1}{2} \neq cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

لہذابیان صحیح نہیں ہے۔

(v) $A = 0°$ کے لئے $\cot A$ معرف نہیں ہے۔

$cotA = \frac{cosA}{sinA} \Rightarrow cot0° = \frac{cos0°}{sin0°} = \frac{1}{0} = N.D$

لہذابیان صحیح ہے۔

مشق 8.3

1۔ قدر معلوم کیجئے:

(i) $\frac{\sin 18°}{\cos 72°}$ (ii) $\frac{\tan 26°}{\cot 64°}$ (iii) $\cos 48° - \sin 42°$ (iv) $\operatorname{cosec} 31° - \sec 59°$

(I) $\frac{\sin 18°}{\cos 72°} = \frac{\sin(90° - 72°)}{\cos 72°}$ $= \frac{\cos 72°}{\cos 72°} = 1$	(II) $\frac{\tan 26°}{\cot 64°} = \frac{\tan(90° - 64°)}{\cot 64°}$ $= \frac{\cot 64°}{\cot 64°} = 1$
(III) $\cos 48° - \sin 42° = \cos(90° - 42°) - \sin 42°$ $= \sin 42° - \sin 42°$ $= 0$	(IV) $\operatorname{cosec} 31° - \sec 59° = \operatorname{cosec}(90° - 59°) - \sec 59°$ $= \sec 59° - \sec 59°$ $= 0$

2۔ دکھائیے کہ:

(i) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67° = 1$

(ii) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0$

(I) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67°$ $= \tan(90° - 42°) \tan(90° - 67°) \tan 42° \tan 67°$ $= \cot 42° \cot 67° \tan 42° \tan 67°$ $= (\cot 42° \tan 42°)(\cot 67° \tan 67°)$ $= (1)(1)$ $= 1$	(II) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52°$ $= \cos(90° - 52°) \cos(90° - 38°) - \sin 38° \sin 52°$ $= \sin 52° \sin 38° - \sin 38° \sin 52°$ $= 0$

3۔ اگر $\tan 2A = \cot(A - 18°)$، جہاں $2A$ ایک حادہ زاویہ ہے، تو A کی قدر معلوم کیجئے۔

$\tan 2A = \cot(A - 18°)$

$\cot(90° - 2A) = \cot(A - 18°)$

$90° - 2A = A - 18°$

$108° = 3A$

$A = 36°$

4۔ $\tan A = \cot B$ تو ثابت کیجئے کہ $A + B = 90°$۔

$\tan A = \cot B$

$\tan A = \tan(90° - B)$

$A = 90° - B$

$A + B = 90°$

5۔ اگر $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20°)$، جہاں $4A$ ایک حادہ زاویہ ہے، تو A کی قدر معلوم کیجئے۔

$$\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20°)$$
$$\operatorname{cosec}(90° - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20°)$$
$$90° - 4A = A - 20°$$
$$110° = 5A$$
$$A = 22°$$

6۔ اگر A،B اور C مثلث ABC کے داخلی زاویہ ہیں تو دکھائیے $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

ہم جانتے ہیں کہ مثلث ABC میں

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$
$$\angle B + \angle C = 180° - \angle A$$
$$\frac{\angle B + \angle C}{2} = 90° - \frac{\angle A}{2}$$
$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90° - \frac{A}{2}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{A}{2}\right)$$

7۔ $\sin 67° + \cos 75°$ کو 0° اور 45° کے درمیان زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں میں ظاہر کیجئے۔

$$\sin 67° + \cos 75°$$
$$= \sin(90° - 23°) + \cos(90° - 15°)$$
$$= \cos 23° + \sin 15°$$

مشق 8.4

1۔ ٹرگنومیٹری نسبتیں sin A، sec A اور tan A کو cot A کی شکل میں لکھئے۔

$$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$$
$$\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = \frac{1}{1 + \cot^2 A}$$
$$\sin^2 A = \frac{1}{1 + \cot^2 A}$$
$$\sin A = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$$

$\sqrt{1+\cot^2 A}$ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$$
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$
$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$
$$\tan A = \frac{1}{\cot A}$$
$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$
$$= 1 + \frac{1}{\cot^2 A}$$
$$= \frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A}$$
$$\sec A = \frac{\sqrt{\cot^2 A + 1}}{\cot A}$$

2۔ $\angle A$ کی sec A کی شکل میں تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کو لکھئے۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\sin A = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sec A}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A}} = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$$

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

$$\tan^2 A = \sec^2 A - 1$$

$$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{1}{\sec A}}{\frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

3۔ قدر معلوم کیجئے:

(i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$ (ii) $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

(ii) $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$ $= (\sin 25°)\{\cos(90° - 25°)\} + \cos 25°\{\sin(90° - 25°)\}$ $= (\sin 25°)(\sin 25°) + (\cos 25°)(\cos 25°)$ $= \sin^2 25° + \cos^2 25°$ $= 1$ (As $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$)	(i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$ $= \dfrac{[\sin(90° - 27°)]^2 + \sin^2 27°}{[\cos(90° - 73°)]^2 + \cos^2 73°}$ $= \dfrac{[\cos 27°]^2 + \sin^2 27°}{[\sin 73°]^2 + \cos^2 73°}$ $= \dfrac{\cos^2 27° + \sin^2 27°}{\sin^2 73° + \cos^2 73°}$ $= \dfrac{1}{1}$ (As $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$) $= 1$

4۔ صحیح جواب کو چنئے اور اپنے انتخاب کا جواز پیش کیجئے۔

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A =$ (A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$

$= 9 (\sec^2 A - \tan^2 A)$

$= 9 (1)$ [As $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$]

$= 9$

لہٰذا B صحیح ہے

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cssec}\,\theta) =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

$(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$

$$= \left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)$$
$$= \left(\frac{\cos\theta + \sin\theta + 1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta}\right)$$
$$= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - (1)^2}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$$

لہذا C صحیح ہے

(iii) (secA + tanA) (1 - sinA) = (A) $\sec^2 A$ (B) -1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)(1 - \sin A)$$
$$= \left(\frac{1 + \sin A}{\cos A}\right)(1 - \sin A)$$
$$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A}{\cos A}$$
$= \cos A$

لہذا D صحیح ہے

(iv) $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ (A) $\sec^2 A$ (B) -1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$	(iv) $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \frac{1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}$ $= \frac{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}}$ $= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A$ لہذا D صحیح ہے

5۔ مندرجہ ذیل تماثلات کو ثابت کیجئے، اس میں ملوث تمام زاویہ حادہ ہیں جن کے لئے عبارتیں معرف ہیں۔

(i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$

L.H.S. $= (\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2$
$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$
$$= \frac{(1 - \cos\theta)^2}{(\sin\theta)^2} = \frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{(1 - \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = \frac{(1 - \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$$
$=$ R.H.S.

(ii) $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}+\dfrac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}$$
$$=\frac{\cos^2 A+(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)(\cos A)}$$
$$=\frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{(1+\sin A)(\cos A)}$$
$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\sin A}{(1+\sin A)(\cos A)}$$
$$=\frac{1+1+2\sin A}{(1+\sin A)(\cos A)}=\frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)(\cos A)}$$
$$=\frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)(\cos A)}=\frac{2}{\cos A}=2\sec A$$
$$=\text{R.H.S.}$$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$
$$=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$
$$=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$iv)\ \dfrac{1+secA}{secA}=\dfrac{\sin^2 A}{1-cosA}$

$$LHS=\frac{1+secA}{secA}=\frac{1+\frac{1}{cosA}}{\frac{1}{cosA}}=\frac{\frac{cosA+1}{cosA}}{\frac{1}{cosA}}=cosA+1$$
$$\Rightarrow\frac{(1-cosA)(1+cosA)}{(1-cosA)}=\frac{1-\cos^2 A}{1-cosA}=\frac{\sin^2 A}{1-cosA}$$

v) $\dfrac{\text{cosA}-\text{sinA}+1}{\text{cosA}+\text{sinA}-1}=\text{cosecA}+\text{cotA}$

$$w.k.t, cosec^2A=1+\cot^2 A$$
$$L.H.S=\frac{cosA-sinA+1}{cosA+sinA-1}$$
$$\Rightarrow\frac{\frac{cosA}{sinA}-\frac{sinA}{sinA}+\frac{1}{sinA}}{\frac{cosA}{sinA}+\frac{sinA}{sinA}-\frac{1}{sinA}}=\frac{cotA-1+cosecA}{cotA+1-cosecA}=\frac{\{(cotA)-(1-cosecA)\}\{(cotA)-(1-cosecA)\}}{\{(cotA)+(1-cosecA)\}\{(cotA)-(1-cosecA)\}}$$
$$=\frac{(cotA-1+cosecA)^2}{(cotA)^2-(1-cosecA)^2}=\frac{\cot^2 A+1+cosec^2A-2cotA-2cosecA+2cotAcosecA}{\cot^2 A-1-(1+cosec^2A-2cosecA)}$$
$$=\frac{2cosec^2A+2cotAcosecA-2cotA-2cosecA}{\cot^2 A-cosec^2A-1+2cosecA}$$
$$=\frac{(cosecA+cotA)(2cosecA-2)}{-1-1+2cosecA}=\frac{(cosecA+cotA)(2cosecA-2)}{2cosecA-2)}=cosecA+cotA=RHS$$

$$(vi)\ \sqrt{\frac{1+sinA}{1-sinA}} = secA + tanA$$

$$LHS = \sqrt{\frac{1+sinA}{1-sinA}} = \sqrt{\frac{(1+sinA)(1+sinA)}{(1-sinA)(1+sinA)}} = \sqrt{\frac{(1+sinA)^2}{1-\sin^2 A}} = \frac{1+sinA}{\sqrt{\cos^2 A}} = \frac{1+sinA}{cosA} = \frac{1}{cosA} + \frac{sinA}{cosA}$$

$$= secA + tanA = RHS$$

$$vii)\ \frac{sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - cos\theta} = tan\theta$$

$$LHS = \frac{sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-cos\theta} = \frac{sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{cos\theta(2\cos^2\theta-1)} = \frac{sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{cos\theta(2(1-\sin^2\theta)-1)} = \frac{sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{cos\theta(1-2\sin^2\theta)} = tan\theta = RHS$$

$$viii)(sinA + cosecA)^2 + (cosA + secA)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$LHS = (sinA + cosecA)^2 + (cosA + secA)^2 = \sin^2 A + \mathrm{cosec}^2 A + 2\,sinAcosecA + \cos^2 A + \sec^2 A + 2secA\,cosA$$

$$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + \mathrm{cosec}^2 A + \sec^2 A + 2secA\,cosA + 2sinAcosecA$$

$$= 1 + (1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A + 2sinA\left(\frac{1}{sinA}\right) + 2secA(\frac{1}{secA})$$

$$= 1 + 1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A + 2 + 2$$

$$= 7 + \cot^2 A + \tan^2 A = RHS$$

$$ix)(cosecA - sinA)(secA - cosA) = \frac{1}{tanA+cotA}$$

$$LHS = (cosecA - sinA)(secA - cosA) = \left(\frac{1}{sinA} - sinA\right)(\frac{1}{cosA} - cosA)$$

$$\left(\frac{1-\sin^2 A}{sinA}\right)\left(\frac{1-\cos^2 A}{cosA}\right) = \frac{(\cos^2 A)(\sin^2 A)}{sinAcosA} = sinAcosA$$

$$RHS = \frac{1}{tanA + cotA} = \frac{1}{\frac{sinA}{cosA} + \frac{cosA}{sinA}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{sinAcosA}} = \frac{sinAcosA}{1} = sinAcosA$$

$$\therefore LHS = RHS$$

$$x)\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-tan\,A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$$

$$\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \frac{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}} = \frac{\frac{\cos^2 A + sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A$$

$$\left(\frac{1-tan\,A}{1-\cot A}\right)^2 = \frac{1+\tan^2 A - 2tanA}{1+\cot^2 A - 2cotA} = \frac{\sec^2 A - 2tanA}{cosec^2 A - 2cotA} = \frac{\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{2sinA}{cosA}}{\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{2cosA}{sinA}} = \frac{\frac{1-2sinAcosA}{\cos^2 A}}{\frac{1-2sinAcosA}{\sin^2 A}} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A$$